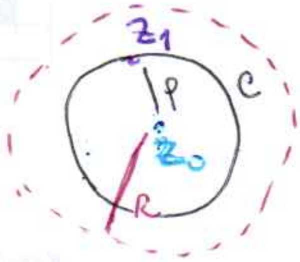
MODULO MÁXIMO

LEMA: Sea f holomorfa en $|z-z_0|<R$.

Si $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo z tal que $|z-z_0|<R$

$\Rightarrow$ f es constante en $|z-z_0| \leq R$.



Dem: Sea $z_1 \neq z_0$ / $|z_1-z_0| = \rho < R$

Sea C: circunf centro z_0, radio ρ

$\Rightarrow$ FIC: $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}\,dz$

parametrización de C: $z = z_0+\rho e^{it}$ $\quad t\in[0,2\pi]$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\rho e^{it})}{\rho e^{it}} \cdot \underbrace{i\rho e^{it}}_{z'(t)}\,dt$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{it})\,dt$$ $\rightarrow$ ($f(z_0)$ es promedio de los valores de f sobre la circunf)

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{it})\,dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+\rho e^{it})|\,dt$$

por hipótesis: $|f(z_0+\rho e^{it})| \leq |f(z_0)|$. Entonces:

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|\,dt = \frac{|f(z_0)|}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = |f(z_0)|$$

$\Rightarrow$ todos los "$\leq$" son "$=$"

$\Rightarrow$ $|f(z_0)| = |f(z_0+\rho e^{it})|$ $\quad$ ρ es cualquier radio $<R$.

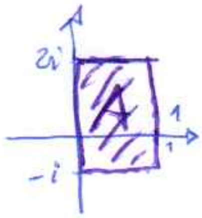
$\Rightarrow$ $|f(z)|$ es cte en $|z-z_0|<R$ $\Rightarrow$ f es cte

$\Rightarrow$ $f(z_0) = f(z)$ para todo z: $|z-z_0|<R$

PRINCIPIO DEL MODULO MAXIMO

Sea f holomorfa y no constante en dominio D, → abierto conexo
Entonces f no alcanza valor máximo en D.

Corolario 1: si f es continua en una región cerrada y acotada, A y holomorfa en el interior de A, y f no constante, entonces el máximo de $|f(z)|$ se alcanza en la frontera de A.



Ej: $f(z) = z^2$ en $A = \{z : 0 \leq Re\, z \leq 1, \ -1 \leq Im\, z \leq 2\}$
$|f(z)| = x^2 + y^2$ alcanza máximo en $1+2i \in A$,
$1+2i \in \partial A$

→ Equivalen:

- Si f alcanza máximo en un dominio D ⟹ o es constante o no es holo en D

- Si f no es constante y alcanza máximo en dominio D ⟹ f no es holomorfa en D.

- Si f es holomorfa en dominio D y alcanza máximo en D ⟹ f es constante en D.

Además: si $f = u + iv$ satisface hipótesis del corolario,
$g(z) = e^{f(z)} = e^{u+iv}$ también las satisface.
⟹ $|g|$ alcanza máximo en la frontera de A
$|g(z)| = e^{u(x,y)}$ alcanza máx. en frontera
⟹ $u(x,y)$ alcanza máx. en la frontera.
(Similarmente: $v(x,y)$ alcanza máx en frontera)

Corolario: si u(x,y) es la parte real de una función continua y no constante en un conjunto cerrado y acotado A, holomorfa en el interior de A, entonces u alcanza su máximo en la frontera.

Corolario 2: si f es continuo en región cerrada y acotada A, y no constante y holomorfo en el interior, y $f(z) \neq 0$ en A entonces $|f(z)|$ alcanza su valor mínimo en la frontera de A.

(por el corolario anterior aplicado a $g(z) = \frac{1}{f(z)}$)

Ejemplo $f(z) = e^{iz}$ holomorfo en $4x^2+y^2<4$ y continuo en $4x^2+y^2 \leq 4$

$\Rightarrow |f(z)|$ alcanza máximo en $4x^2+y^2=4$

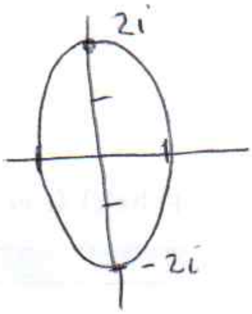
$$|f(z)| = e^{-y} \leq e^{2}, \; \cancel{\forall}$$

$\uparrow$

$y \geq -2$

$-y \leq 2$

$e^{-y} \leq e^{2}$



y alcanza esa cota en $z_0 = -2i$

$$|f(-2i)| = |e^{i(-2i)}| = e^{2}$$

Como $f \neq 0$ en $\mathbb{C} \Rightarrow |f(z)|$ alcanza mínimo en $4x^2+y^2=4$.

$|f(z)| = e^{-y} \geq e^{-2}$ y alcanza esa cota en $z_1 = 2i$

$\uparrow$

$y \leq 2$

$-y \geq -2$

$e^{-y} \geq e^{-2}$

$$|f(2i)| = |e^{i(2i)}| = e^{-2}$$

FUNCIONES ARMONICAS

Una función $u: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es armónica en D, D abierto si es C^2 en D y $\underbrace{u''_{x_1x_1} + u''_{x_2x_2} + \dots + u''_{x_nx_n} = 0}_{\text{ECUACION DE LAPLACE}}$ en D.

En $\mathbb{R}^2$: $\quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$

En $\mathbb{R}^3$: $\quad u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0$

Ejemplos

① $u(x,y) = 3x - 2y$, C^2 y $u''_{xx} = 0 \quad u''_{yy} = 0 \Rightarrow u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ en $\mathbb{R}^2$

② $u(x,y) = x^2 - y^2$: C^2 y $\quad u''_{xx} = 2 \quad u''_{yy} = -2$

$u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ en $\mathbb{R}^2$

③ $u(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ es C^2 en $D = \{(x,y) : x > 0\}$

$$u'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$u''_{xx} = \frac{+y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$u''_{yy} = -\frac{x \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

Teorema. Si $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ es holomorfa en $D \subset \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ u y v son armónicas en D.

Dem.

f holomorfa $\Rightarrow u, v$ son C^{∞} $\Rightarrow$ son C^2

Cauchy Riemann: $\left.\begin{array}{l} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} u''_{xx} = v''_{yx} \\ u''_{yy} = -v''_{xy} \end{array}$

v es $C^2 \Rightarrow v''_{yx} = v''_{xy} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{u''_{xx} + u''_{yy} = 0}$

Semi lamente: $\left.\begin{array}{l} u''_{xy} = v''_{yy} \\ u''_{yx} = -v''_{xx} \end{array}\right\} \Rightarrow u$ es $C^2 \Rightarrow u''_{xy} = u''_{yx}$

$\Rightarrow \boxed{v''_{xx} + v''_{yy} = 0}$

Ej: $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i\,2xy$

$f(z) = e^z = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y$

$f(z) = e^{z^2} = e^{x^2-y^2} \cos(2xy) + i e^{x^2-y^2} \operatorname{sen}(2xy)$

Son armónicas en $\mathbb{R}^2$:

$x^2 - y^2$, $2xy$

$e^x \cos y$ $e^x \operatorname{sen} y$

$e^{x^2-y^2} \cos(2xy)$

$e^{x^2-y^2} \operatorname{sen}(2xy)$

Si dos funciones armónicas u y v satisfacen

$\left.\begin{array}{l} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{array}\right. \Rightarrow$ "v es armónica conjugada de u"

$\Rightarrow f(z) = u + iv$ es holomorfa

Pero: $g(z) = v + iu$ también es holomorfa?

Si $f = u + iv$ es holo $\Rightarrow$ $if = -v + iu$ es holo $\Rightarrow$

$-if = v - iu$ es holo.

$g = v + iu = \overline{-if}$ no es holomorfa, a menos que sea constante (prob. 19b, TP2)

$\Rightarrow$ $-u$ es conjugada armónica de v porque $v - iu$ es holo

u es conjugada armónica de $-v$ porque $-v + iv$ es holo

Ejemplo. Sea $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$ es armónica en $\mathbb{R}^2$ $\to$ chequearlo.

Existe armónica conjugada de u?

Debe cumplir: $u'_x(x,y) = v'_y(x,y) = -6yx$ ①

$u'_y(x,y) = -v'_x(x,y) = 3y^2 - 3x^2$ ②

$\Rightarrow$ de ① $v(x,y) = \int v'_y(x,y)\,dy = -3y^2x + \alpha(x)$

$\Rightarrow v'_x(x,y) = -3y^2 + \alpha'(x) = -3y^2 + 3x^2$

$\Rightarrow \alpha'(x) = 3x^2 \Rightarrow \alpha(x) = x^3 + c$

$v(x,y) = -3y^2x + x^3 + c$ $\to$ armónica conjugada de u, para cq $c \in \mathbb{R}$.

y $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3y^2x + c)$ es holo en $\mathbb{C}$

$f(z) = iz^3 + ic$

Ejemplo $u(x,y) = \operatorname{senh} x \cos y$ es armónica en $\mathbb{R}^2$.

Existe armónica conjugada?

$u'_x = \cosh x \cos y = v'_y \Rightarrow v(x,y) = \int \cosh x \cos y\,dy = \cosh x \operatorname{sen} y + \alpha(x)$

$$v'_x = \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y + \alpha'(x) = -u'_y = \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$$
$$\Rightarrow \alpha'(x) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v(x,y) = \cosh x \operatorname{sen} y + C \rightarrow$$ armónico conjugado de u para cq $C \in \mathbb{R}$.

$$f(z) = u + iv = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y + iC$$

$$f(z) = \operatorname{senh} z + iC$$

Ejemplo: $u(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ es armónica?

Se luego ver que $u = \operatorname{Re}(f)$ con f holomorfa en D

$\Rightarrow u$ es armónica en D.

$$u(x,y) = \frac{\operatorname{Im}(z^2)}{|z|^4} = \frac{\operatorname{Re}(-iz^2)}{|z|^2|z|^2} = \operatorname{Re}\left(\frac{-iz^2}{z\bar{z}\cdot z\bar{z}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{-i}{\bar{z}^2}\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(\overline{\frac{i}{z^2}}\right) = \operatorname{Re}\left(\overline{\left(\frac{i}{z^2}\right)}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{i}{z^2}\right)$$
$\hookrightarrow \operatorname{Re}(w) = \operatorname{Re}(\bar{w})$

$f(z) = \dfrac{i}{z^2}$ es holomorfa en $\mathbb{C} - \{0\}$

$\Rightarrow u$ es armónica en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y $v(x,y) = \operatorname{Im}\left(\dfrac{i}{z^2}\right)$ es su conj. armónica

$$v(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Ejemplo $u(x,y) = x(1-y) = x - xy$ es armónica?
Existe f holomorfa tal que $u = \operatorname{Re}(f)$?

Veamos: $u(x,y) = x - xy = \operatorname{Re}(z) - \frac{1}{2}\operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}\left(-i\dfrac{z^2}{2}\right) =$

$u(x,y) = \operatorname{Re}\left(z + i\dfrac{z^2}{2}\right)$. Como $f(z) = z + i\dfrac{z^2}{2}$ es holo en $\mathbb{C}$

$\Rightarrow u(x,y)$ es armónica en $\mathbb{R}^2$ y su conj. armónica:

$$v(x,y) = y + \frac{x^2 - y^2}{2}$$

Vimos: dada $f = u + iv$ $\Rightarrow$ u y v son armónicas y
f holomorfa v es ~~una~~ armónica conjugada de u.

Ahora: Dado u armónico en D abierto. Existe f holomorfa en D tal que $u = \operatorname{Re}(f)$?

↳ podemos asegurarlo si D es simplemente conexo

Sea D simplemente conexo ~~en~~ y u armónica en D.
Sea C contorno cerrado simple en D.

$$\int_C -u'_y \, dx + u'_x \, dy \underset{\downarrow}{=} \iint_{RI(C)} u''_{xx} - (-u''_{yy}) \, dx\, dy = 0$$

Green:
al ser D simplemente conexo, $RI(C) \subset D$,
u es $C^2 \Rightarrow u'_x, u'_y$ son C^1 en D $\Rightarrow$
u'_x, u'_y son C^1 en C y en $RI(C)$

$$\int_C -u'_y \, dx + u'_x \, dy = 0$$ para cualquier contorno cerrado en D

$\Rightarrow$ el campo $\bar{F} = (-u'_y, u'_x)$ es conservativo $\Rightarrow$
existe potencial $v(x,y)$ tal que $\nabla v(x,y) = (v'_x, v'_y) = \bar{F}(x,y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} v'_x = -u'_y \\ v'_y = u'_x \end{cases}$$ $\Rightarrow$ v es armónico conjugado de u en D

y $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ es holomorfa en D.

Teorema: Sea u armónica en D abierto, D simplemente conexo.
Entonces existe f holomorfa en D, $f: D \to \mathbb{C}$, tal que $\operatorname{Re}(f) = u$.

Ejemplo: $u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ → armónica?

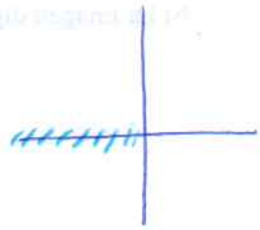
$$u'_x = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad u''_{xx} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u'_y = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad u''_{yy} = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow u''_{xx} + u''_{yy} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}.$$

conj. armónica? No lo podemos asegurar con el resultado anterior, porque $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ no es simplemente conexo.

Sea $D = \mathbb{R}^2 - \{(x,0) : x \leq 0\}$



D es simplemente conexo ⇒ existe conjugado armónico de u en D ⇒ existe v definido en D tal que $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es holo en D

$$f(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\,v(x,y)$$

$$= \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\,v(x,y) \quad \Rightarrow$$

$$v(x,y) = \mathrm{Arg}(x+iy) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & x>0 \\ \pi/2 & x=0,\ y>0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)+\pi & x<0,\ y>0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)-\pi & x<0,\ y<0 \\ -\pi/2 & x=0,\ y<0 \end{cases}$$

Esa $v(x,y)$ es C^∞ y armónico en D!

Ojo! Existen armónicas en dominios NO simplemente conexos que tienen armónico conjugado:

$$u(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \longrightarrow v(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad f(z) = \frac{1}{z^2} = u+iv$$

Armónicas en polares

Ecuación de Laplace en polares:

$$r^2 U''_{rr}(r,\theta) + r\, U'_r(r,\theta) + U''_{\theta\theta}(r,\theta) = 0$$

Hallar las funciones armónicas que no dependan de r.

Si $U(r,\theta)$ no depende de r:

$U'_r = 0$

$U''_{rr} = 0$

Ec. Laplace: $U''_{\theta\theta} = 0 \Rightarrow U'_\theta(r,\theta) = A \Rightarrow \boxed{U(r,\theta) = A\theta + B}$

Hallar las funciones armónicas que no dependan de θ

Si $U(r,\theta)$ no depende de θ:

$U''_{\theta\theta} = 0$

Ec. Laplace: $r^2 U''_{rr} + r\, U'_r = 0$

$$\frac{U''_{rr}}{U'_r} = -\frac{1}{r} \Rightarrow \ln|U'_r| = -\ln r + A$$

$$|U'_r| = \frac{e^A}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{U(r,\theta) = a\ln(r) + b}$$

Ej: $u(r,\theta) = 3\ln(r) + 5$ es armónica para ptos con $r>0$.

$U(r,\theta) = \operatorname{Re}\big(\underbrace{3\cdot \operatorname{Log}(z) + 5}_{\text{holo en } \mathbb{C} - \text{semieje real negativo}}\big)$

también: $U(r,\theta) = \operatorname{Re}\big(\underbrace{3\cdot \log(z) + 5}_{\text{holomorfa en } \mathbb{C} - \text{semieje real positivo}}\big)$ Usando $\log(z) = \ln r + i\theta$, $0<\theta<2\pi$